Diakoptic II

Olivier Maurice - Yuri Sohor - Alain Reineix

Jeudi 29 Décembre 2011

Résumé

Ce papier présente l'approche Diakoptic classique telle qu'abordée par Kron dans son "tensorial analysis of networks", bien que le terme n'y soit pas explicitement mentionné. On reprend d'abord la notion de schéma de Thèvenin généralisé, puis l'implémentation de ce concept à un cas quelconque de réseaux. On explore enfin une approche établissant directement les relations entre les courants avant et après connexions.

1 Formes de Diakoptiques :

La diakoptique a été initiée par Kron dans les années 1950. Le mot Diakoptic en Anglais fut créé par le professeur Philip Stanley, du département de philosophie de l'Union College à New York [1]. Il vient du Grec "kopto" qui signifie découper, partager et du préfixe "dia" qui renforce l'idée de "très partagé". Pour l'ingénieur, le but général de la Diakoptique est de pouvoir réduire la complexité d'un système très grand en étudiant des parties et en pouvant remonter au comportement de l'ensemble sans erreurs. On peut aborder le sujet de la décomposition d'un système en sous-système de diverses façons, suivant les besoins et les informations dont on dispose :

1. on peut partir de sous-systèmes et créer un système par transformations : on détermine la métrique du système puis on effectue le calcul sur cette nouvelle métrique ;
2. on peut partir de sous-systèmes déjà calculés pour établir les observables du système : dans ce cas on chercher à exprimer le nouveau système en fonction des variables déjà calculées ;
3. on peut partir d'un système et le découper en gardant l'information de l'influence des autres parties sous la forme de sources reportées ;
4. on peut faire la même opération par transformations en ne gardant que l'expression de couplages vers les autres parties.

Ces différentes opérations peuvent s'effectuer dans différents espaces de configurations. Nous abordons ici quelques uns des thèmes regroupés dans la problématique générale de la Diakoptique.

1. Gabriel Kron and Systems Theory. GE Company. Schenectady, NY 1973.

2 Schéma de Thévenin généralisé

On considère le circuit représenté figure 1.

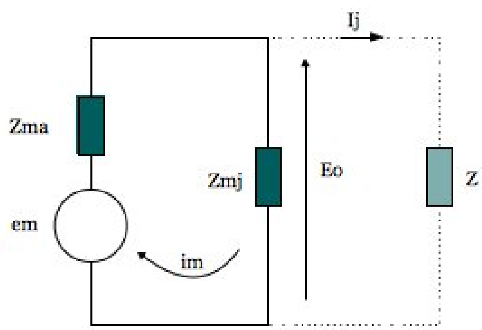

Figure 1 : schéma considéré

On écrit : $Z_{mm} = Z_{ma} + Z_{mj}$.

La question du schéma de Thévenin se pose en ces termes : quel est le courant I^j circulant dans Z en fonction de la tension E_0 existant avant que l'on branche Z ?

Avant de brancher la charge Z, on peut écrire :

$$\begin{cases} e_m = Z_{mm} i^m \\ \\ E_0 = E_j = Z_{jm} i^m \end{cases}$$

Après ajout de la charge, on se trouve en présence d'une nouvelle topologie à deux mailles. i^m et I^j sont les deux courants de mailles généralisés. La tension développée aux bornes de la charge peut être intégrée comme source de cette maille. De fait on obtient :

$$\begin{cases} e_m = Z_{mm} i^m - Z_{mj} I^j \\ \\ e_j = Z I^j = -Z_{jm} i^m + Z_{jj} I^j \end{cases}$$

Ce deuxième système est déduit du couplage entre les deux mailles. Du premier système d'équations on déduit le courant de maille : $i^m = e_m Z_{mm}^{-1} \Rightarrow E_0 = Z_{jm} e_m Z_{mm}^{-1}$. Du deuxième système on obtient alors : $i^m = \left(e_m + Z_{mj} I^j\right) Z_{mm}^{-1}$. En remplaçant dans la seconde équation du second système on trouve :

$$Z I^j = -Z_{jm} \left(e_m + Z_{mj} Ij\right) Z_{mm}^{-1} + Z_{jj} I^j$$

On met I^j en facteur pour obtenir :

$$I^j\left(Z + Z_{jm}Z_{mm}^{-1}Z_{mj} - Z_{jj}\right) = -Z_{jm}e_mZ_{mm}^{-1}$$

En utilisant la dernière relation sur E_0 et en notant $Z' = Z_{jj} - Z_{jm}Z_{mm}^{-1}Z_{mj}$ on exprime la dernière relation par :

$$I^j = -\left(Z - Z'\right)^{-1}E_0$$

Z' est l'impédance dite "de court-circuit" vue de la charge Z. E_0 est la tension de circuit-ouvert en l'absence de la charge.

Tout le raisonnement se retrouve en considérant une topologie de deux mailles où la fém de la seconde maille est assurée par la ddp développée aux bornes de la charge Z : ZI^j.

3 Démarche en courant

L'opération suivante permet de détailler le passage entre deux relations, passage non trivial. On établi au départ, circuits séparés, des relations de sens et liens entre les courants de mailles et de peires de nœuds partagées. On réutilise ensuite cette relation lors de la constitution du système complet, avec un signe négatif issu des relations après connexion, que l'on peut voir comme un bilan de courant.

Considérons la figure 2 où l'on voit un réseau séparé en deux réseaux, puis reconstitué.

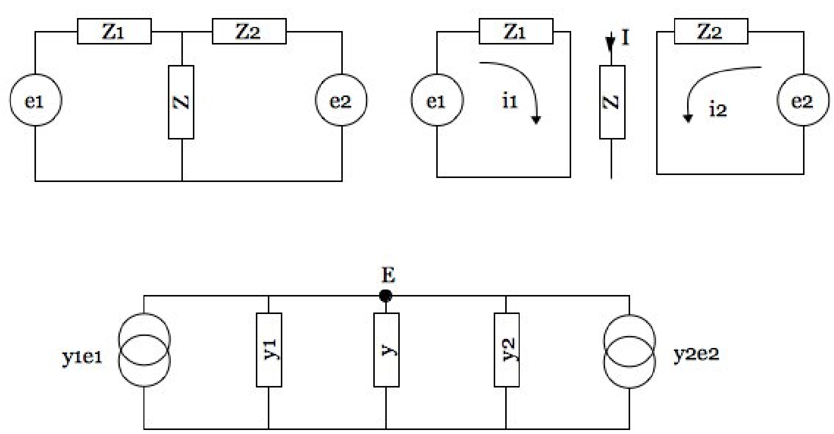

Figure 2 : opération de diakoptique sur deux réseaux

En regardant les deux circuits séparés, on peut écrire :

$$\begin{cases} i_{10} = y_1e_1 \\ i_{20} = y_2e_2 \end{cases}$$

en notant avec une zéro dans l'indice les courants dans cette seconde configuration. Dans le circuit complet on doit avoir : $i_1 + i_2 = Z^{-1}E$ Z étant ici l'inverse de l'admittance totale. Du circuit avant séparation on peut écrire : $e_1 = Z_1 i_1 + E$ et $e_2 = Z_2 i_2 + E$. De ces deux relation son tire :

$$\begin{cases} i_1 = y_1 e_1 - y_1 E \\ i_2 = y_2 e_2 - y_2 E \end{cases}$$

Or, $E = Z\left(i_{10} + i_{20}\right)$. Par remplacement on obtient :

$$\begin{cases} i_1 = y_1 e_1 - y_1 Z\left(y_1 e_1 + y_2 e_2\right) \\ i_2 = y_2 e_2 - y_2 Z\left(y_1 e_1 + y_2 e_2\right) \end{cases}$$

que l'on généralise dans le paragraphe suivant.

4 Application sur un système de N réseaux

Sur un système partagé de N réseaux chacun connexes mais non reliés, séparés sur des critères ingénieurs, avec des frontières identifiées (on applique la diakoptic), on écrit les liens entre les courants des mailles de frontières i^α et les courants des paires de nœuds écartées I^b lors de la séparation du réseau complet en réseaux séparés (des court-circuits remplacent les charges partagées) :

$$i^\alpha = A^\alpha_{\ b} I^b$$

Cette relation donne les liens des directions choisies entre les mailles de frontières court-circuitées après séparation des réseaux et les courants des paires de nœuds écartées. On a par ailleurs la relation générale entre les courants de mailles et les fém sources sur les mailles de frontières :

$$i^\alpha = Y^{\alpha\alpha} e_\alpha$$

La conductivité sur les branches frontières peut s'écrire comme la transformation des conductivité de mailles de frontières additionnée des conductivité des branches écartées :

$$Y^{bb} = A^b_{\ \alpha} Y^{\alpha\alpha} A_\alpha^{\ b} + Y'^{ff}$$

Les tensions des paires de nœuds de frontière s'expriment en fonction des courants des paires de nœuds écartées :

$$U_b = Z_{bb} I^b$$

Le tenseur des impédances est l'inverse des admittances exprimées précédemment : $Z_{bb} = \left(A^b_{\ \alpha} Y^{\alpha\alpha} A_\alpha^{\ b} + Y'^{ff}\right)^{-1}$.

La variation de fém aux niveaux des mailles de frontières s'exprime à partir de la connexion et des tensions des paires de nœuds partagées :

$$\Delta e_\alpha = A_\alpha^{\ b} U_b$$

De cette variation est engendrée une variation du courant de maille :

$$\Delta i^{\alpha} = Y^{\alpha\alpha} \Delta e_{\alpha}$$

Le courant de maille total est la somme du courant initial et du courant découlant de la variation de fém :

$$i^{\alpha+} = i^{\alpha} + \Delta i^{\alpha}$$

5 Synthèse

A partir de la relation $i^{\alpha} = A^{\alpha}_{\ b} I^{b}$, on déduit une autre relation : $-A^{b}_{\ \alpha} i^{\alpha} = I^{b}$. En effet lorsque l'on reconnecte les réseaux on doit, aux nœuds respecter la loi de conservation qui implique entre les courants des charges écartées et les courants de mailles calculés aux frontières : $I^{b} + A^{b}_{\ \alpha} i^{\alpha} = 0$ Avec cette relation et l'ensemble des relations précédentes, on obtient la relation générale :

$$i^{\alpha+} = \left(1 - Y^{\alpha\alpha} A_{\alpha}^{\ b} Z_{bb} A^{b}_{\ \alpha}\right) Y^{\alpha\alpha} e_{\alpha}$$

Les courants de mailles après insertion des charges sont calculés en fonction des tensions obtenues avant connexion des charges via des sortes "d'impédances ramenées" prenant en compte ces combinaisons.

6 Diakoptique dans le seul espace des mailles

Nous avons vu que la diakoptique "classique" fait appel aux relations dans l'espace complet, exploitant conjointement les espace des paires de nœuds, des branches et des mailles. Nous voulons ici explorer la possibilité de faire de la diakoptique en s'adressant uniquement à l'espace des mailles, mais en cherchant des relations qui s'établissent entre les courants de mailles, et non par transformations comme il a déjà été fait dans des études précédentes.

Tout système comportant des mailles avec des branches communes (donc tout système de plus d'une maille) peut être représenté par un ensemble de systèmes couplés où la branche commune est remplacée par un couplage et deux branches frontières appartenant aux deux systèmes séparés (le genre des deux topologies est identique).

6.1 Principe de base

Nous allons illustrer le principe sur le cas simple de deux mailles couplées. Chaque maille a sa propre métrique. Le tenseur fondamental du système non couplé est décrit par la structure suivante :

$$Z = \begin{bmatrix} \breve{Z}_1 & \breve{0} \\ \breve{0} & \breve{Z}_2 \end{bmatrix}$$

Où le chapeau inversé indique que l'objet est une matrice est non un simple nombre. S'agissant sur ce premier exemple de matrices 2x2, chaque terme est effectivement un nombre : chaque réseau ne comporte qu'une maille. Maintenant ajoutons un couplage μ entre les deux réseaux - donc entre les deux mailles. Le tenseur fondamental devient :

$$Z = \begin{bmatrix} \breve{Z}_1 & \breve{\mu} \\ \breve{\mu} & \breve{Z}_2 \end{bmatrix}$$

Du premier tenseur on tire le système d'équations :

$$\begin{cases} e_1 = \breve{Z}_1 \underline{i}^1 \\ e_2 = \breve{Z}_2 \underline{i}^2 \end{cases}$$

Où les $\underline{i}^k$ sont les courants déterminés pour les deux réseaux non couplés.

On veut maintenant exprimer les courants des réseaux couplés en fonction des réseaux non couplés. Inversons le deuxième système pour obtenir :

$$\begin{cases} i^1 = \frac{\breve{Z}_2}{\Delta} e_1 - \frac{\breve{\mu}}{\Delta} e_2 \\ \\ i^2 = -\frac{\breve{\mu}}{\Delta} e_1 + \frac{\breve{Z}_1}{\Delta} e_2 \end{cases}$$

Δ est le déterminant de Z. En remplaçant e_k par son expression en fonction de $\underline{i}^k$, étant invariant, on trouve :

$$\begin{cases} i^1 = \frac{\breve{Z}_1 \breve{Z}_2}{\Delta} \underline{i}^1 - \frac{\breve{\mu} \breve{Z}_2}{\Delta} \underline{i}^2 \\ \\ i^2 = -\frac{\breve{\mu} \breve{Z}_1}{\Delta} \underline{i}^1 + \frac{\breve{Z}_1 \breve{Z}_2}{\Delta} \underline{i}^2 \end{cases}$$

Si les couplages opèrent sur quelques mailles de frontière (ici nous n'avons que 2 mailles, cette discution concerne donc le cas où chaque sous-système est composé de nombreuses mailles), il est intéressant de résoudre les systèmes séparément (on peut paralléliser les calculs, ou bien en avoir déjà fait certains précédemment et ne pas vouloir les refaire) puis de calculer les termes précédents dont les matrices de couplages, pratiquement réduite à un terme, engendrent des produits très faciles à calculer. Dans le cas où le couplage effectivement agit entre deux mailles de frontières uniquement, le produit d'un couplage par un autre engendre une matrice réduite à 1 terme non nul. Le produit d'un couplage par une matrice d'impédance donne un vecteur. Le déterminant se calcule ainsi facilement, et comme il donne un scalaire son inversion est sans souci. Les autres produits sur les numérateurs sont simples et rapides à calculer également sous cette hypothèse.

6.2 Généralisation

Les relations précédentes s'étendent pour un système à N sous-systèmes avec :

$$\Delta \cdot i^m = [Z]_m \, \Delta^{(m,m)} \underline{i}^m + \sum_{j \neq m} [Z]_j \, \Delta^{(j,m)} \underline{i}^j$$

$\Delta^{(i,j)}$ est le déterminant dans Z obtenu en barrant la ligne i et la colonne j.

Le déterminant de Z peut être obtenu en utilisant le complément de Schur dont l'expression là aussi se simplifie du fait des nombreuses matrices de couplages réduites à 1 terme non nul.